Katolikus Pedagógiai Intézet, 1068 Budapest, Városligeti fasor 42.
Telefon: (+36-1) 479-3000 | honlap: https://www.katped.hu

Geometriai valószínűség kidolgozott feladatok
-11-12. évfolyam-

Készítette: Tóthné Virág Ágnes Annamária szaktanácsadó, matematika szakterület

Szakterület: Matematika

Téma: Geometriai valószínűség kidolgozott feladatok

Célcsoport: 11-12. évfolyam

Típus: Órai segédanyag

Rövid leírás
A szakmai anyag a 2020-ban bevezetésre került NAT és kerettantervek legfontosabb jellemzőire és újdonságaira épül.

A geometriai valószínűség számolásnál az elemi eseményeket egy geometriai alakzat pontjaihoz rendeljük hozzá, és feltételezzük, hogy egy eseményhez tartozó ponthalmaz mértéke arányos az esemény valószínűségével. Fontosnak tartom a változatos feladattartalmakat, hiszen a fogalom nem csak geometriai esetekben alkalmazható: például a Descartes-féle koordináta-rendszerben a 60 egység, azaz „1 perc oldalú” négyzettel vagy 24 egység, azaz „1 nap oldalú” négyzettel változatos szöveges feladatokat oldhatunk meg.

Bizonyos feladatok megoldásához szükséges a ponthalmazok a koordinátarendszerben ismeretek alkalmazása is. A példák különböző nehézségűek, így lehetőség van a differenciálásra. A (K) jelű feladatok a középszintű érettségire, továbbá az (E) jelű feladatok az emelt szintű érettségire készítenek fel.

Szakmai lektorok: Tarnay Péter
Kovács Andrea Éva

Készült: 2023. május

Utolsó módosítás: 2023. október

Felhasználási feltételek: A közzétett anyag a KaPI tulajdona.

Tanulás, tanítás céljára szabadon felhasználható, de saját iskolai gyakorlaton kívül csak megfelelő forrásmegjelöléssel használható.

1. Adott egy 2 méter hosszú szalag, amiből 70 cm piros, 50 cm fehér és 80 cm zöld színű ebben a sorrendben. Véletlenszerűen kettévágjuk valahol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét darab kétszínű lesz? (K)

   Megoldás:

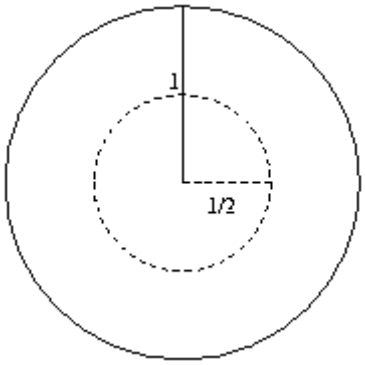
   Legyen A a vizsgált esemény.

   Akkor lesz mindkettő kétszínű, ha a kettévágás helye a középső fehér részbe esik. Ennek a valószínűsége:

$$P(A) = \frac{50}{200} = 0{,}25.$$

2. Számítsd ki a valószínűségét annak, hogy egy egységsugarú körben véletlenszerűen elhelyezett pont közelebb van a kör középpontjához, mint a kerületéhez! (K)

   Megoldás:



   Legyen A a vizsgált esemény.

   Egy egységsugarú kör belsejében azok a pontok, melyek egyenlő távolságra vannak a középpontjától és a kerületétől, egy $\frac{1}{2}$ sugarú kör kerületének pontjai. Ezen a körön belül lévő pontok vannak a körök középpontjához közelebb.

   A keletkezett valószínűség:

$$P(A) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi}{1^2 \cdot \pi} = \frac{1}{4}.$$

3. A $[0;1[$ intervallumból véletlenszerűen kiválasztunk egy számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám első tizedesjegye legalább 3? (K)

   Megoldás:

   Legyen A a vizsgált esemény.

   Azok a számok, amelyek a feladatban szereplő feltételt teljesítik, a $[0{,}3;1[$ intervallum elemei. A geometriai valószínűségi modell alapján a kérdezett valószínűség:

$$P(A) = \frac{0,7}{1} = 0,7.$$

4. Válasszunk a $[2; 15[$ intervallumból véletlenszerűen egy valós számot. Határozd meg annak a valószínűséget, hogy a szám egészrésze 3-mal osztható! (E)

   Megoldás:

   A megoldáshoz szükséges az egészrész -függvény alkalmazása is. Ennek a fogalomnak a rövid elméleti összefoglalása a következő:

   Minden x valós számhoz hozzárendeljük az x egészrészét, azaz azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb x-nél. Ezt a függvényt egészrész-függvénynek hívjuk, és így jelöljük: [x] (olvasd: egészrész x).

   Legyen A a vizsgált esemény.

   Az alábbi halmaz teljesíti a feladat feltételeit: $[3,4[\cup [6; 7[\cup [9,10[\cup [12; 13[$.

   Ezen intervallumok hosszának összege 4 egység, az alaphalmaz hossza 13 egység.

   A keletkezett valószínűség:

$$P(A) = \frac{4}{13}.$$

5. Egy intervallum belsejében véletlenszeren kiválasztunk egy P pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a P pont közelebb van a felezőponthoz, mint bármelyik másik végponthoz? (K)

   Megoldás:

   Legyen A a vizsgált esemény.

   Az intervallumot jelölje AB, felezőpontját F. A szakasz negyedelőpontjai A-tól B felé indulva rendre: M és N. A feltételnek az MN szakasz belső pontjai felelnek meg, amely szakasz hossza az AB hosszának fele.

   A keletkezett valószínűség:

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

6. Egy repülőgép 14000 km^2 területű terepen géphiba miatt kényszerleszállást hajt végre. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a mentőalakulatok egy 70 km^2 -es völgyben megtalálják? (K)

   Megoldás:

   Legyen A a vizsgált esemény.

   A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{70}{14000} = \frac{1}{200}.$$

7. Legyen egy 50 cm oldalú négyzet alakú céltábla és a közepén egy 10 cm sugarú kör. Ha véletlenszeren lövünk és mindig a céltáblába találunk, mekkora a valószínűsége, hogy körbe lövünk? (K)

   Megoldás:

   Legyen A a vizsgált esemény.

   A célba találás valószínűsége, amely a kör területének és a négyzet területének arányával egyenlő.

$$P(A) = \frac{10^2 \cdot \pi}{50^2} = \frac{100 \cdot \pi}{2500} = \frac{\pi}{25} \approx 0{,}126.$$

   Tehát $0{,}126$ a valószínűsége annak, hogy körbe lövünk.

8. Egy R sugarú körlemezen találomra kiválasztunk egy pontot. Legyen annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont valamelyik tartományba esik, a tartomány területével arányos. Menyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a kör középpontjától r-nél kisebb távolságra lesz? $(r < R)$ (K)

   Megoldás:

   Legyen A a vizsgált esemény.

   A megfelelő valószínűség a területek arányából számolható ki:

$$P(A) = \frac{r^2 \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi}.$$

9. Egy 10 km hosszú útszakasz két végpontján egy-egy óra van. Ezeken a mutatók kerek percenként ugranak. Egy gépkocsi az egyik végponttól olyankor indul, amikor itt az órán 12 óra 0 perc van, a másik végpont felé halad 70 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel. Mi a valószínűsége annak, hogy az érkezés időpillanatában az ottani óra már 12 óra 9 percet mutat? (K)

   Megoldás:

   Jelöljük a vizsgált eseményt A-val.

   A gépkocsi menetideje:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10\ \text{km}}{70\ \frac{\text{km}}{\text{óra}}} = \frac{1}{7}\text{óra} = \frac{60}{7}\text{perc} = 8\frac{4}{7}\text{perc}$$

   Az indulás 12 óra és 12 óra 1 perc között történhet. Az A esemény akkor következik be, ha a kocsi 12 óra $\frac{3}{7}$ perc és 12 óra 1 perc között indul, vagyis $\frac{4}{7}$ perces időközön belül.

Az A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{4}{7}.$$

10. Egy távbeszélőállomás és a központ közötti vezeték hossza 450 m. Mi annak a valószínűsége, hogy az első hiba a vezetéknek a központtól 180 m-nél távolabbi helyén lép fel, ha a vezeték mentén bárhol azonos a meghibásodás veszélye? (K)

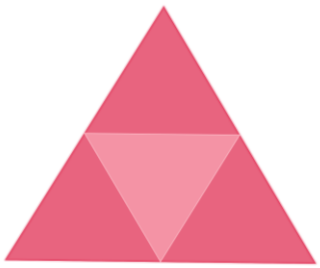
    Megoldás:

    Legyen A a vizsgált esemény.

$$P(A) = \frac{450 - 180}{450} = \frac{270}{450} = 0{,}6$$

11. Egy szabályos háromszög alakú céltáblába véletlenszerű lövések érkeztek. A céltáblát egybevágó kisebb szabályos háromszögekre osztottuk fel és színeztük ki az alábbi ábrán látható módon. A felosztás során az eredeti háromszög oldalait egyenlő részekre osztottuk. Mekkora valószínűséggel találja el a lövedék a céltábla sötét színűre festett részét? (E)

    Megoldás:



    Legyen az A esemény az, hogy a lövedék a sötét színűre festett területre csapódik be. A keresett valószínűségeket geometriai valószínűségi mezőben adjuk meg. Az események valószínűségével arányos mérték a terület. Az eseménytér a céltábla, ahol T a céltábla területe.

    A felosztás során keletkező kis háromszögek hasonlók az eredeti háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{2}$.

    Felhasználjuk, hogy a hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, azaz ahol t-vel a felosztáskor keletkező egy kis háromszög területét jelöljük.

    Tehát felírhatjuk, hogy:

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{4}.$$

A sötét színűre festett kis háromszögeket megszámolva adódik, hogy:

$$P(A) = \frac{3 \cdot t}{T} = \frac{3}{4}.$$

12. A geoláda-keresés, idegen szóval geocaching (ejtsd: geokesing) egy világszerte elterjedt játék. Játékos kedvű emberek elrejtenek valahol egy ládát, majd a helyszín GPS-szel meghatározott koordinátáit közzéteszik az Interneten. Akinek van GPS-e, és kedveli a kalandokat, megpróbálja megtalálni ezt a ládát, és ha sikerrel jár, pontot kap. Aki elég pontot gyűjtött, jogot szerez arra, hogy maga is elrejtsen valahol egy ilyen ládát. Egy éjszakai portyázáson GPS-ünk azt mutatta, hogy ahol állunk, annak 3 méteres körzetében kell lennie a ládának. Gazos, bokros részen jártunk, 1 négyzetméter átfésüléséhez 10 percre is szükségünk volt. Mi a valószínűsége annak, hogy fél órán belül megtaláljuk a ládát? (K)

Megoldás:

Legyen A a vizsgált esemény.

Az összes lehetőség egy 3 m sugarú kör területe, tehát $T = 3^2 \cdot \pi \approx 28{,}27\ m^2$.

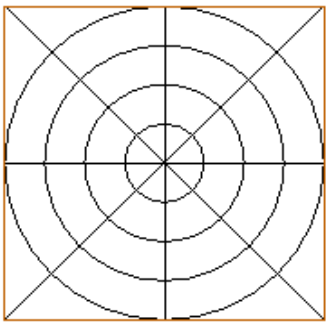
A 30 perc alatt átfésülhető terület $3\ m^2$.

A keresett valószínűség tehát:

$$P(A) = \frac{3}{28{,}27} \approx 0{,}106 = 10{,}6\%.$$

13. Egy pók beszőtte a 40 cm × 40 cm-es pinceablakot, az ábrán az egyes körök sugarai 5, 10, 15 és 20 cm-esek. Mekkora valószínűséggel várja a pók az áldozatát a háló egyenes szakaszán? (K)

Megoldás:



Legyen A a vizsgált esemény. A négy kör kerületének összege:

$$2 \cdot 5 \cdot \pi + 2 \cdot 10 \cdot \pi + 2 \cdot 15 \cdot \pi + 2 \cdot 20 \cdot \pi = 100 \cdot \pi \approx 314{,}16\ cm^2$$

Legyen „a” a négyzet 40 cm-es oldala, tehát az egyenes szakaszok hossza.

$$2 \cdot a + 2 \cdot a \cdot \sqrt{2} = 80 + 80 \cdot \sqrt{2} \approx 193{,}14 \text{ cm}.$$

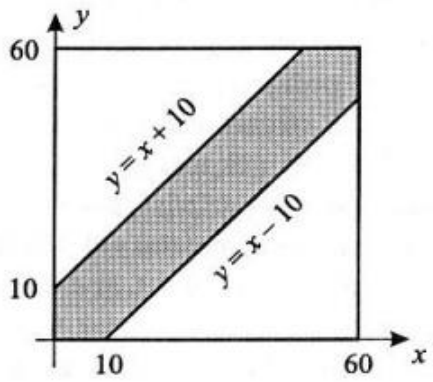
A pókháló teljes hossza: $314{,}16 + 193{,}14 = 507{,}3$ cm.

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{193{,}14}{507{,}3} \approx 0{,}38 = 38\%.$$

14. Két ember megbeszéli, hogy egy adott napon 19 és 20 óra között találkoznak. Az adott időintervallumban véletlenszerűen érkeznek a helyszínre. Mekkora a valószínűsége, hogy egyikük sem vár 10 percnél többet? (E)

Megoldás:



Legyen.x azon percek száma amennyivel az egyik ember 19 óra után érkezik a helyszínre, és y amennyivel később a másik érkezik. A két adatot rendezett párok formájában koordinátarendszerben ábrázolhatjuk. Ekkor az elemi események egy 60x60-as négyzet pontjai lesznek.

Legyen az A esemény, hogy l0 percnél kevesebbet kell várakozniuk a másikra.

Tehát kedvező esetben a két beérkezés között eltelt idő kisebb, mint l0 perc, azaz:

$$|x - y| < 10.$$

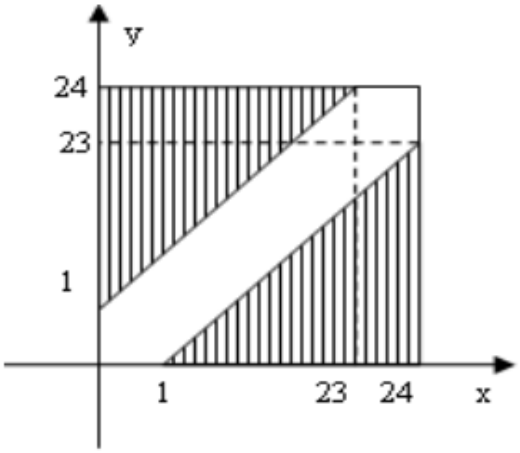
A keresett valószínűség a satírozott rész területének és a négyzet területének aránya.

A satírozott rész területet megkapjuk, ha a négyzet területéből kivonjuk a két háromszög területét, melyek együtt egy 50 oldalhosszúságú négyzetet alkotnak.

$$P(A) = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{1100}{3600} \approx 0{,}306 = 30{,}6\%.$$

15. Egy kikötőhöz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban 2 hajó érkezik. Az előbb érkező rögtön megkezdi a pakolást, mely egy órát vesz igénybe. Mi a valószínűsége, hogy valamelyik hajónak várakoznia kell? (E)

Megoldás:



A vizsgált eseményt jelöljük A-val.

Legyen x az első hajó érkezésének időpontja, y a második hajó érkezésének időpontja.

Ha az első hajó érkezik később, akkor a kedvező eseteket az

$$x - y \geq 1$$

egyenlőtlenség írja le.

Ebből következik, hogy:

$$y \leq x - 1$$

Ha a második hajó érkezik később, akkor a kedvező eseteket az

$$y - x \geq 1$$

egyenlőtlenség írja le.

Ebből következik, hogy:

$$y \geq x + 1$$

A koordinátarendszerben ábrázolva a kedvező eseteknek megfelelő pontok egy 24×24-es négyzet vonalkázott területei alkotják, mivel

$$0 \leq x \leq 24 \text{ és } 0 \leq y \leq 24.$$

A vonalkázott területek összege

$$2 \cdot \frac{23^2}{2} = 529 .$$

A négyzet területe:

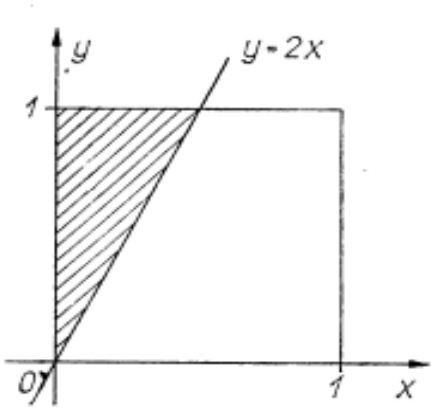
$$24^2 = 576.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{529}{576} \approx 0.92.$$

16. Legyen A egy d hosszúságú szakasz egyik végpontja. Ezen a szakaszon két pontot választunk találomra, vagyis úgy, hogy a szakasz bármely részébe esés valószínűsége arányos a részszakasz hosszával. Legyenek ezek B és C pontok. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a B pont közelebb van a A-hoz, mint az C-hez! (E)

Megoldás:



A vizsgált eseményt jelöljük A-val. A „d” hosszúságú szakaszhoz rendeljük hozzá a $]0;1[$ intervallumot, továbbá az „A” végponthoz pedig az origót.

A B és C pontoknak a $]0;1[$ intervallum x és y koordinátájú pontja felelnek meg úgy, hogy a távolságok aránya nem változik. E két koordinátával a sík egységnégyzetének egyik (x,y) pontját választjuk ki véletlenszerűen, úgy, hogy az egységnégyzet bármely résztartományába tartozás valószínűsége arányos e résztartomány területének nagyságával.

Az egységnégyzet területe: $T = 1$.

Az A esemény teljesül, ha

$$x < y - x \text{ vagyis } 2 \cdot x < y.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek megfelel az egységnégyzetben a vonalkázott rész, melynek területe: $t = \frac{1}{4}$.

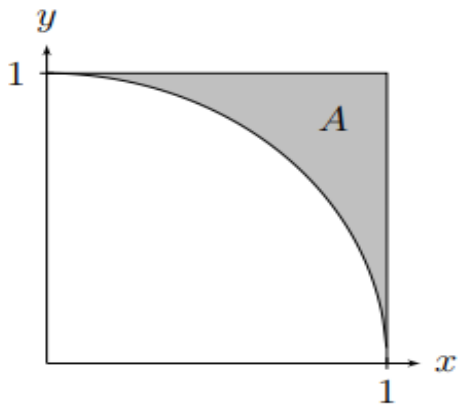
Az A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{t}{T} = \frac{1}{4}.$$

Tehát $\frac{1}{4}$ a valószínűsége annak, hogy a B pont közelebb kerül az A-hoz, mint a C-hez.

17. A $[0;1]$ intervallumon kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a négyzetösszegük 1-nél nagyobb? (E)

Megoldás:



A vizsgált eseményt jelöljük A-val.

Legyen a kiválasztott két szám x és y.

Az A esemény teljesül, ha

$$x, y \in [0;1]$$

és

$$x^2 + y^2 > 1.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek megfelel az egységnégyzetben a vonalkázott rész, melynek területe az 1 egység oldalú négyzet és az 1 egység sugarú kör $\frac{1}{4}$ részének a különbsége.

$$t = 1 - \frac{1^2 \cdot \pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Az egységnégyzet területe $T = 1$.

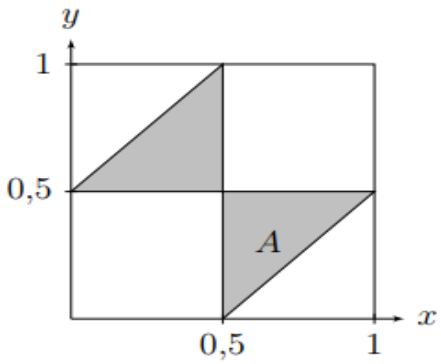
Az A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{t}{T} = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{1} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Tehát $1 - \frac{\pi}{4}$ annak valószínűsége, hogy a két szám négyzetösszege 1-nél nagyobb.

18. Egy pálcát három helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három pálcából kirakható egy háromszög? (E)

Megoldás:



A vizsgált eseményt jelöljük A-val.

A pálca legyen egységnyi hosszúságú, és a két töréspont távolsága az egyik végponttól legyen x illetve y. Ekkor $x, y \in [0,1]$.

Ha $x \leq y$, akkor a három pálca hossza x, $y - x, 1 - y$. Ezek közül bármely kettő összegének nagyobbnak kell lennie, mint a harmadik.

$$\begin{cases} x + y - x > 1 - y \\ x + 1 - y > y - x \\ y - x + 1 - y > x \end{cases}$$

Ezért az $\begin{cases} y > 0{,}5 \\ y < x + 0{,}5 \\ x < 0{,}5 \end{cases}$ egyenlőtlenségeknek egyszerre kell teljesülni.

Ha $y < x$ teljesül, akkor a három pálca hossza $y, x - y, 1 - x$. Ezek közül bármely kettő összegének nagyobbnak kell lennie, mint a harmadik.

$$\begin{cases} y + x - y > 1 - x \\ y + 1 - x > x - y \\ x - y + 1 - x > y \end{cases}$$

Ezért az $\begin{cases} x > 0{,}5 \\ y > x - 0{,}5 \\ y < 0{,}5 \end{cases}$ egyenlőtlenségeknek kell egyszerre teljesülni.

Az előző eredmények alapján az egyenlőtlenségeknek megfelel az egységnégyzetben a sötét színre festett rész, melynek területe:

$$t = \frac{1}{4}.$$

Az egységnégyzet területe $T = 1$.

Az A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{t}{T} = \frac{1}{4}.$$

Tehát $\frac{1}{4}$ annak valószínűsége, hogy a kapott három pálcából kirakható egy háromszög.

19. Egy darts tábla kör alakú, átmérője 45 cm. Közepén a táblával koncentrikusan helyezkedik el egy 4 cm átmérőjű tartomány. Egy játékos 3-szor dob, feltételezzük, hogy mindegyik találata a táblán egyenletes eloszlású, véletlenszerű (a táblát biztosan eltalálja). Mekkora a valószínűsége hogy legalább 2-szer betalál a középső tartományba? (E)

Megoldás:

Egy dobás esetén annak a valószínűsége, hogy a játékos betalál a középső tartományba:

$$P(A) = \frac{2^2 \cdot \pi}{22{,}5 \cdot \pi} = 0{,}0079$$

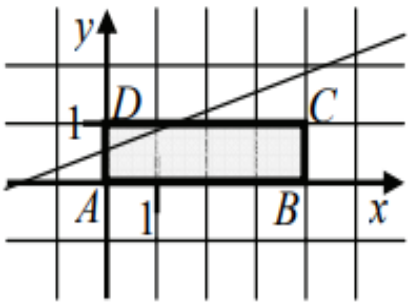
Így a keletkezett valószínűség:

$$P = \binom{3}{2} \cdot 0{,}0079^2 \cdot (1 - 0{,}0079) + \binom{3}{3} \cdot 0{,}0079^3 = 0{,}000186.$$

20. A derékszögű koordináta-rendszerben adott egy téglalap, amelynek csúcsai: A(0;0), B(4;0), C(4;1) és D(0;1). Véletlenszerűen kiválasztjuk a téglalap egy belső P (x; y) pontját. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $y \leq \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$? (E)

(2012-es emelt szintű érettségi feladat)

Megoldás:



A vizsgált eseményt jelöljük A-val.

Az $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ egyenes az y tengelyt a $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ pontban metszi, továbbá az $y = 1$ egyenest a $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ pontban metszi.

A megfelelő P pontok a téglalapnak az $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ egyenes alatti részéből kerülnek ki.

Ennek a résznek a területe:

$$T_{jó} = 4 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2}{2} = \frac{29}{8}.$$

Így a keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{\frac{29}{8}}{4} = \frac{29}{32} = 0{,}90625.$$

21. Egy téglatest alakú szoba méretei méterben mérve:

$2{,}5 \times 3 \times 2{,}75$. A szoba mennyezetéről egy csonkakúp alakú lámpabúra lóg. A búra alapkörének átmérője 50 cm, a fedőkör átmérője 30 cm, az alkotó 40 cm hosszú. A szobában egy légy repked teljesen véletlenszerűen (Tekinthetjük úgy, hogy egy adott pillanatban a légy a szoba bármely pontjában ugyanakkora valószínűséggel tartózkodik). Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy adott pillanatban a légy a lámpabúra belsejében tartózkodik? (K)

(Középszintű érettségi mintafeladat a 2024. január 1-től bevezetésre kerülő vizsgakövetelmények szerint)

Megoldás:

A vizsgált eseményt jelöljük A-val.

A szoba térfogata:

$$V_{szoba} = 2{,}5 \cdot 3 \cdot 2{,}75 = 20{,}625\ \text{m}^3.$$

A lámpabúra m magassága centiméterben mérve Pitagorasz- tétel alapján:

$$m^2 + 10^2 = 40^2$$

$$m^2 = 1500$$

$$m \approx 38{,}7\ \text{cm}.$$

A lámpabúra térfogata:

$$V_{lámpabúra} = \frac{38{,}7\cdot\pi}{3}(25^2 + 25 \cdot 15 + 15^2) \approx 50\,000\ \text{cm}^3 = 0{,}050\ \text{m}^3.$$

Így a keresett valószínűség a két térfogat hányadosa:

$$P(A) = \frac{V_{lámpabúra}}{V_{szoba}} = \frac{0{,}050}{20{,}625} = 0{,}0024.$$

Felhasznált irodalom

- Fröhlich Lajos Alapösszefüggések matematikából középszint, Maxim Kiadó Szeged 2005.
- Fröhlich Lajos Alapösszefüggések matematikából emelt szint, Maxim Kiadó Szeged 2005.
- Ruff János-Schultz János Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12. évfolyam Maxim Kiadó Szeged 2009.
- Solti György Valószínűségszámítás példatár Műszaki Könyvkiadó Budapest 1993.
- Tómács Tibor Valószínűségszámítás ESZTERHÁZY KÁROLY KATOLIKUS EGYETEM, Matematikai és Informatikai Intézet Eger 2023. január 1. https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitas.pdf
- Bartha Gábor, Bogdán Zoltán, Duró Lajosné dr., Gyapjas Ferencné, Hack Frigyes, dr. Kántor Sándorné, dr. Korányi Erzsébet: Matematika feladatgyűjtemény II. a középiskolák számára, Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest, 1997.
- https://www.komal.hu/cikkek/valszam/valszam5.h.shtml
- https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Matematika/2013/24.pdf
- http://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/11-%C3%A9vfolyam/2_Tan%C3%A1ri%20modulok/amat11_1_tan%C3%A1r.pdf
- NAT2020 ÉS ÉRETTSÉGI2024 A KÖVETELMÉNYEK VÁLTOZÁSAIRA FELKÉSZÍTŐ KÉPZÉS MATEMATIKATANÁROK SZÁMÁRA 30 órás akkreditált pedagógus-továbbképzés (Oktatási hivatal) 2023. június
- https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok
- Kerettanterv matematikából 9-12. évfolyam: https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat
- 2024-től érvényes érettségi követelmények matematikából: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2024/matematika_2024_e.pdf
- https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/mintafeladatok_2024
- saját anyagok