Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2023/24. 2. forduló
9. évfolyam
Javítási útmutató

1. Egy termék árát 15 %-kal csökkentették, így a terméken a haszon 10 % lett. Mennyi volt az eladó eredeti haszna ezen a terméken. (A haszon az eladási és beszerzési ár különbsége.) **6 pont**

   A termék beszerzési ára x Ft, eredeti eladási ára y Ft, az új eladási ára $0{,}85y$ Ft. 2 pont

   $1{,}1x = 0{,}85y$ 2 pont

   $y = 1{,}2941x$ 1 pont

   $29{,}41\%$ volt az eredeti haszon a terméken. 1 pont

   Összesen: 6 pont

2. Egy zöldséges a citromot 20 kg, a narancsot 40 kg és a banánt 70 kg tömegű dobozokban tudja megrendelni. Az általa rendelt dobozok számának harmada 70 kg tömegű, a 20 kg tömegű dobozokból 8 darabbal kevesebb rendelt, mint a 40 kg tömegű dobozokból. A rendelt gyümölcsök együttes tömege 3200 kg. Melyik gyümölcsből hány kilógrammot rendelt? **7 pont**

   Narancsból legyen x; citromból $x-8$; banánból $x-4$ dobozzal. 2 pont

   $20(x-8)+40x+70(x-4)=3200$ 2 pont

   $x = 28$ 2 pont

   Citromból 400 kg-ot, narancsból 1120 kg-ot, míg banánból 1680 kg-ot rendelt. 1 pont

   Összesen: 7 pont

3. Egy dobozban 4 piros, 5 fehér és 3 zöld színű, egyforma méretű golyó van.
   - A dobozból visszatevés nélkül veszünk ki 4 golyót. Döntsd el, hogy a következő kijelentések igazságértékét!
     a) A kihúzott golyók lehetnek azonos színűek. **2 pont**
     b) A dobozban fehér színű golyó maradt, de zöld színű nem. **2 pont**
   - Hány golyót kell kihúzni a dobozból legalább, hogy az alábbi kijelentések biztosan teljesüljenek!

A kihúzott golyók között legyen

c) 3 zöld színű. **3 pont**

d) legalább 2 különböző színű. **3 pont**

e) legalább 2 azonos színű. **3 pont**

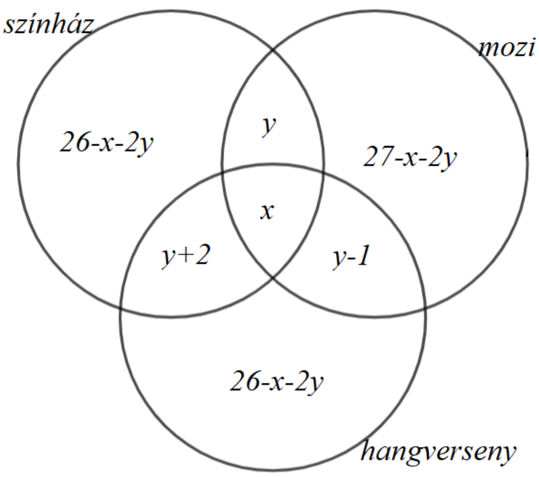
A válaszaid minden esetben indokold!

a) igaz 1 pont
indoklás: példa megadása 1 pont

b) hamis 1 pont
indoklás: utalás rá, hogy zöld színű golyó maradhat a dobozban 1 pont
c) 12 1 pont
indoklás: először ki lehet húzni a nem zöld színűeket, majd a végén a zöldeket 2 pont
d) 6 1 pont
indoklás: ha kihúzzuk az 5 fehér színűt, akkor még nem lesz 2 különböző szín, a hatodik húzásra biztosan más színt húzunk 2 pont
e) 4 1 pont
indoklás: először húzunk mindhárom színből 1-1 darabot, majd negyedikre bármit húzva lesz valamelyik színből 2 db. 2 pont

Összesen: 13 pont

4. Az egyik osztály a tanév során szervezett színház, mozi és hangversenylátogatást is. Az osztály minden tanulója legalább egy programon részt vett, pontosan 2 programon 22-en, míg csak moziban 3 tanuló volt. Színházba 28-an, moziba 26-an, míg hangversenyre 27-en mentek. Azok közül, akik legalább két programon is részt vettek színházba és hangversenyre 2-vel többen, míg hangversenyre és moziba 1-gyel kevesebben mentek, mint színházba és moziba. Hány tanuló jár ebbe az osztályba? Hány olyan tanuló volt, aki az előző programok közül csak az egyiken vett részt? **10 pont**



Halmazábra készítése 4 pont
$3y + 1 = 22$ 1 pont
$y = 7$ 1 pont
$27 - x - 2y = 3$ 1 pont
$x = 10$ 1 pont
Az osztályba 39 tanuló jár. 1 pont
Csak 1 programon 7 tanuló vett részt. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Az *ABCD* négyzet oldalfelezőpontjait összekötöttük a négyzet egy belső *P* pontjával. Az így keletkezett négyszögek közül háromnak a területe $18\ cm^2$; $21\ cm^2$ és $31\ cm^2$. Mekkora lehet a négyzet oldalának pontos értéke?

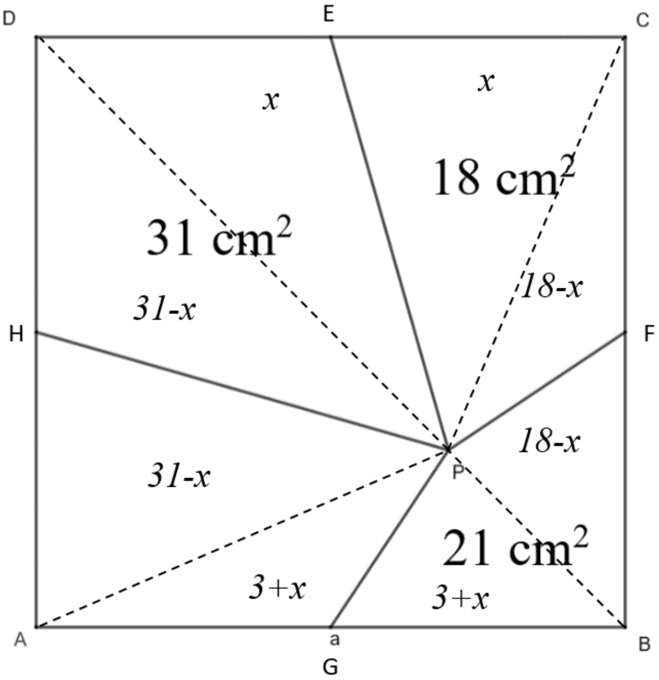
15 pont

1. eset: $21\ cm^2$ és $31\ cm^2$-es rész van egymással szemben:
Kössük össze a *P* pontot a négyzet mindegyik csúcsával. A keletkező háromszögek területei

$T_{DPE\Delta} = T_{CPE\Delta} = x$, hiszen *E* a *CD* oldal felezőpontja, ezért az *EP* szakasz felezi a $DPC\Delta$ háromszög területét. 2 pont

Hasonlóan: $T_{CPF\Delta} = 18 - x = T_{FPB\Delta}$ 1 pont

Hasonlóan: $T_{GPB\Delta} = 21 - (18 - x) = 3 + x = T_{APG\Delta}$ 1 pont



Hasonlóan: $T_{CPH\Delta} = 31 - x = T_{HPA\Delta}$ 1 pont

Így $T_{HPGA} = 31 - x + 3 + x = 34\ cm^2$ 1 pont

Azaz $T_{ABCD} = 31 + 21 + 18 + 34 = 104\ cm^2$ 1 pont

$a = \sqrt{104}\ cm$ 1 pont

Észre vehetjük, hogy $T_{HPGA} + T_{EPFC} = T_{DEPH} + T_{FBGB}$,
azaz $T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB})$ 1 pont

2. eset: $21\ cm^2$ és $18\ cm^2$-es rész van egymással szemben:

$$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB}) = 2 \cdot (21 + 18) = 78\ cm^2$$ 2 pont

$a = \sqrt{78}\ cm$ 1 pont

3. eset: $31\ cm^2$ és $18\ cm^2$-es rész van egymással szemben:

$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB}) = 2 \cdot (31 + 18) = 98\ cm^2$ 2 pont

$a = \sqrt{98}\ cm$ 1 pont

Összesen: 15 pont

6. Gábor a kisautóit dobozokba rendezi. Ha mindegyik dobozba csak egy autót tesz, akkor x darab autó kimarad. Ha minden dobozba x autót tenne, akkor viszont x doboz üresen maradna. Hány kisautója és hány doboza lehet Gábornak?
15 pont

Az autók száma legyen a, míg a dobozok száma d.

(1) $d = a - x$ 1 pont

(2) $(d - x) \cdot x = a$ 2 pont

$a = x + d$-t behelyettesítve (2)-es egyenletbe

$dx - x^2 = x + d$ 1 pont

$d = \frac{x^2+x}{x-1}$ 2 pont

$d = \frac{x \cdot (x+1)}{x-1}$ 1 pont

$x - 1; x; x + 1$ egymást követő egész számok, melyek közül $x - 1$ osztója x-nek vagy $x + 1$-nek. 1 pont

ez csak az $1; 2; 3$ és a $2; 3; 4$ egymást követő számok esetén teljesül
1 pont

1. eset $x - 1 = 1 \rightarrow x = 2$ 1 pont

Ekkor 8 autója és 6 doboza van Gábornak. 1 pont

Ellenőrzés: Ha mindegyik dobozba csak *1* autót tesz, akkor *2* darab autó kimarad. Ha minden dobozba *2* autót tesz, akkor *2* doboz üresen marad.
1 pont

2. eset $x - 1 = 2 \rightarrow x = 3$ 1 pont

Ekkor 9 autója és 6 doboza van Gábornak. 1 pont

Ellenőrzés: Ha mindegyik dobozba csak *1* autót tesz, akkor *3* darab autó kimarad. Ha minden dobozba *3* autót tesz, akkor *3* doboz üresen marad.
1 pont

Összesen: 15 pont

7. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 1 000 000-nál kisebb természetes szám osztható 72-vel, ha csak a 0, 4 vagy 5 számjegyeket tartalmazhatja? **16 pont**

Egy szám akkor osztható 72-vel, ha osztható 8-cal és 9-cel. 1 pont

8-cal osztható, ha az utolsó 3 számjegye:

$000; 040; 400; 440; 504; 544$ 3 pont

(1-2 jó esetén 1 pont, 3-5 jó esetén 2 pont)

A 9-cel oszthatóság feltétele a számjegyek összege:

$000; 504$ végződés esetén

a maradék három számjegy összege 9 lehet, amely a $0; 4; 5$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt 6 féle sorrendben írhatjuk le. 1 pont

Tehát $2 \cdot 6 = \mathbf{12}$ db ilyen szám van 1 pont

Katolikus Pedagógiai Intézet
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Tehetség Program

vagy 0 lehet, amely a $0; 0; 0$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt 1 féle sorrendben írhatjuk le. 1 pont

Tehát $2 \cdot 1 = \mathbf{2}$ db ilyen szám van 1 pont

$040; 400; 544$ végződés esetén a maradék három számjegy összege 5 lehet, amely a $0; 0; 5$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt 3 féle sorrendben írhatjuk le, 1 pont

Tehát $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ db ilyen szám van 1 pont

vagy 14 lehet, amely a $4; 5; 5$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt is 3 féle sorrendben írhatjuk le, 1 pont

Tehát $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ db ilyen szám van 1 pont

440 végződés esetén a maradék három számjegy összege 10 lehet, amely a $0; 5; 5$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt **3** féle sorrendben írhatjuk le.

1 pont

Tehát összesen $12 + 2 + 9 + 9 + 3 = 35$ db ilyen szám van 1 pont

Összes szám $1\,000\,000$ 1 pont

Valószínűség: $\frac{35}{1\,000\,000}$ 1 pont

Összesen: 16 pont

Katolikus Pedagógiai Intézet
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Tehetség Program