Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2023/24. 2. forduló
12. évfolyam
Javítási útmutató

1. Béci egy perselyébe csak 5, 10 és 20 eurós bankjegyeket gyűjtött. Az egyik hónap elején a perselyében a különböző címletekben ugyanannyi értékű pénze volt. A hónap végén mindegyik címletből ugyanannyi volt a perselyében úgy, hogy az egyik címletből nem került bele újabb darab.
   a) Hány euró lehetett összesen perselyben a hónap végén, ha az elején 56 db pénz volt benne? **7 pont**
   b) Hány darab bankjegy lehetett a perselyben a hónap végén, ha a hónap elején 240 euró volt benne? **5 pont**

Az 5, 10 és 20 eurós bankjegyek számának aránya $4:2:1$ hiszen az értékük megegyezik. 2 pont

a) $4x + 2x + x = 56$ 2 pont
$x = 8$ 1 pont
A hónap elején 32 db 5 eurós, 16 db 10 eurós, 8 db 20 eurós volt a perselyben. 1 pont
Így (Béci hozzátett 16 db 10 euróst és 24 db 20 euróst, így) a hónap végén 1 120 euró volt a perselyben. 1 pont

b) $5 \cdot 4x + 10 \cdot 2x + 20 \cdot x = 240$ 2 pont
$x = 4$ 1 pont
A hónap elején 16 db 5 eurós, 8 db 10 eurós, 4 db 20 eurós volt a perselyben. 1 pont
Így (Béci hozzátett 8 db 10 euróst és 12 db 20 euróst, így) a hónap végén 48 db bankjegy volt a perselyben. 1 pont

Összesen: 12 pont

2. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 1 000 000-nál kisebb természetes szám osztható 72-vel, ha csak a 0, 4 vagy 5 számjegyeket tartalmazhatja? **16 pont**

Egy szám akkor osztható 72-vel, ha osztható 8-cal és 9-cel. 1 pont
8-cal osztható, ha az utolsó 3 számjegye:
$000; 040; 400; 440; 504; 544$ 3 pont
(1-2 jó esetén 1 pont, 3-5 jó esetén 2 pont)
A 9-cel oszthatóság feltétele a számjegyek összege:

$000; 504$ végződés esetén
a maradék három számjegy összege 9 lehet, amely a $0; 4; 5$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt 6 féle sorrendben írhatjuk le. 1 pont
Tehát $2 \cdot 6 = \mathbf{12}$ db ilyen szám van 1 pont
vagy 0 lehet, amely a $0; 0; 0$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt 1 féle sorrendben írhatjuk le. 1 pont
Tehát $2 \cdot 1 = \mathbf{2}$ db ilyen szám van 1 pont

$040; 400; 544$ végződés esetén a maradék három számjegy összege 5 lehet, amely a $0; 0; 5$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt 3 féle sorrendben írhatjuk le, 1 pont
Tehát $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ db ilyen szám van 1 pont
vagy 14 lehet, amely a $4; 5; 5$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt is 3 féle sorrendben írhatjuk le, 1 pont
Tehát $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ db ilyen szám van 1 pont

440 végződés esetén a maradék három számjegy összege 10 lehet, amely a $0; 5; 5$ számjegyek felhasználásával lehet, ezt **3** féle sorrendben írhatjuk le.
1 pont

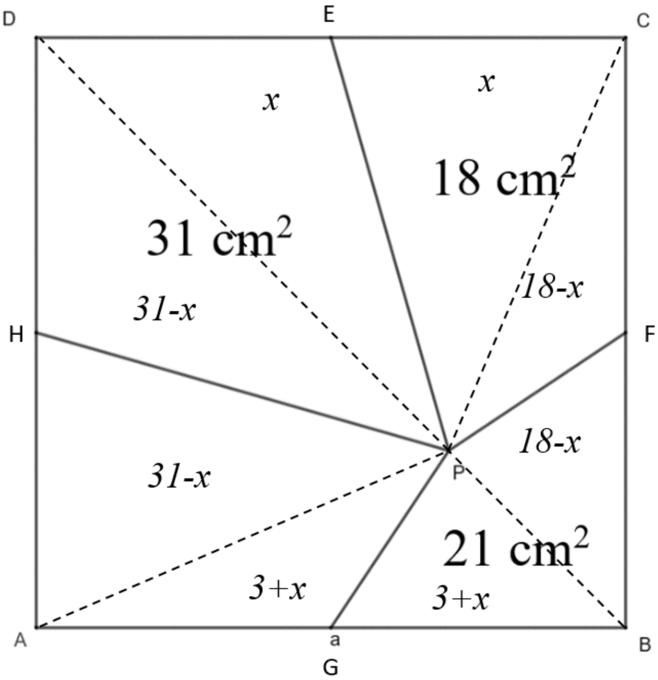
Tehát összesen $12 + 2 + 9 + 9 + 3 = 35$ db ilyen szám van 1 pont
Összes szám $1\,000\,000$ 1 pont
Valószínűség: $\frac{35}{1\,000\,000}$ 1 pont

Összesen: 16 pont

3. Az $ABCD$ négyzet oldalfelezőpontjait összekötöttük a négyzet egy belső P pontjával. Az így keletkezett négyszögek közül háromnak a területe $18\ cm^2$; $21\ cm^2$ és $31\ cm^2$. Mekkora lehet a négyzet oldalának pontos értéke?
15 pont

1. eset: $21\ cm^2$ és $31\ cm^2$-es rész van egymással szemben:
Kössük össze a P pontot a négyzet mindegyik csúcsával. A keletkező háromszögek területei

$T_{DPE\Delta} = T_{CPE\Delta} = x$, hiszen E a CD oldal felezőpontja, ezért az EP szakasz felezi a $DPC\Delta$ háromszög területét. 2 pont
Hasonlóan: $T_{CPF\Delta} = 18 - x = T_{FPB\Delta}$ 1 pont
Hasonlóan: $T_{GPB\Delta} = 21 - (18 - x) = 3 + x = T_{APG\Delta}$ 1 pont



Hasonlóan: $T_{CPH\Delta} = 31 - x = T_{HPA\Delta}$ 1 pont

Így $T_{HPGA} = 31 - x + 3 + x = 34\ cm^2$ 1 pont

Azaz $T_{ABCD} = 31 + 21 + 18 + 34 = 104\ cm^2$ 1 pont

$a = \sqrt{104}\ cm$ 1 pont

Észre vehetjük, hogy $T_{HPGA} + T_{EPFC} = T_{DEPH} + T_{FBGB}$, azaz $T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB})$ 1 pont

2. eset: $21\ cm^2$ és $18\ cm^2$-es rész van egymással szemben:

$$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB}) = 2 \cdot (21 + 18) = 78\ cm^2$$ 2 pont

$a = \sqrt{78}\ cm$ 1 pont

3. eset: $31\ cm^2$ és $18\ cm^2$-es rész van egymással szemben:

$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB}) = 2 \cdot (31 + 18) = 98\ cm^2$ 2 pont

$a = \sqrt{98}\ cm$ 1 pont

Összesen: 15 pont

4. Határozd meg a p paraméter értékét úgy, hogy az
$$x^2 + y^2 - 8x + 12y - p^2 + p = 0$$
egyenlet egy legalább 8 egység sugarú kör egyenlete legyen!
Határozd meg $p = 4$ esetén a $P(1; -2)$ ponton átmenő legrövidebb húr egyenesének egyenletét és a húr hosszának pontos értékét! **16 pont**

$(x-4)^2 + (y+6)^2 = p^2 - p + 52$ 3 pont

$p^2 - p + 52 \geq 64$ 1 pont

$p^2 - p - 12 \geq 0$ 1 pont

$p_1 \geq 4;\ p_2 \leq -3$ 2 pont

A legrövidebb húr merőleges az OP szakaszra. 1 pont

A kör középpontja $O(4; -6)$ 1 pont

$\overrightarrow{OP}(-3; 4)$ az egyenes normálvektora 1 pont

A húr egyenlete: $-3x + 4y = -11$ 1 pont

A húr és a kör metszéspontja legyen A és B.

A húr hosszát az OPA derékszögű háromszögből:

$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{25} = 5$ 1 pont

$p = 4$ esetén $r = 8$ 1 pont

$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 5^2 = 8^2$ 1 pont

$h = 2 \cdot \sqrt{39}$ 2 pont

Összesen: 16 pont

5. Az egyik cukrászdában a fagylaltokat olyan téglalap alapú 15 cm magas csonkagúla alakú tégelyekben tárolják, melynek alapélei 15 cm és 30 cm, míg fedőlapjának élei 20 cm és 40 cm. A fagylaltoskanál 8 cm átmérőjű félgömb alakú. Egy tégely fagylalt előállítási költsége átlagosan 20 ezer Ft. Mennyiért áruljon 1 gombóc fagylaltot a cukrászda 10 Ft-ra kerekítve, ha egy tégely fagylalton átlagosan 40 % haszont szeretne elérni? **10 pont**

A csonkagúla térfogata:

$t = 15 \cdot 30 = 450\ cm^2$ 1 pont

$T = 20 \cdot 40 = 800\ cm^2$ 1 pont

$V = \frac{(800+\sqrt{800 \cdot 450}+450) \cdot 15}{3} = 9\,250\ cm^3$ 1 pont

A fagylaltgombóc térfogata: $V = \frac{4 \cdot 4^3 \cdot \pi}{6} = 134{,}04\ cm^3$ 2 pont

Egy tégelyből $\frac{9\,250}{134{,}04} = 69$ gömb fagyi lesz 1 pont

$69x = 20\,000 \cdot 1{,}4$, ahol x 1 gombóc fagyi ára 2 pont

$x = 405{,}8$ 1 pont

Tehát 1 gombóc fagyit 410 Ft-ért árulja a cukrászda. 1 pont

Összesen: 10 pont

6. Határozd meg x értékét úgy, hogy $log_5 x$; $log_{25} x$; $log_5(log_{25} x)$ ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai legyenek! Mennyi a sorozat differenciája? **12 pont**

Alkalmazva, hogy a számtani sorozat egyik eleme a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő két elem számtani közepe:

$log_{25} x = \frac{log_5 x + log_5(log_{25} x)}{2}$ 2 pont

$x > 0$ 1 pont

$log_{25} x^2 = log_5(x \cdot log_{25} x)$ 2 pont

$log_5 x = log_5(x \cdot log_{25} x)$ 1 pont

$x = x \cdot log_{25} x$ 1 pont

$log_{25} x = 1$, 1 pont

mert $x > 0$, miatt $x = 0$ nem lehet megoldása az egyenletnek. 1 pont

$x = 25$ 1 pont

A sorozat elemei: $2; 1; 0$ 1 pont

A differencia: -1 1 pont

Összesen: 12 pont

7. Hány darab 2024-nél kisebb pozitív egész szám van, amelyre a

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}+\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}+\cdots+\sqrt{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$$

kifejezés értéke racionális szám? **13 pont**

$\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}}=$ 1 pont

$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}}=$ 2 pont

$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2}{1}}=$ 1 pont

$\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|=$ 1 pont

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, mert $x+1>x,$ ha $x\in\mathbb{N}$ 1 pont

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}+\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}+\cdots+\sqrt{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=$

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=$ 2 pont

$\sqrt{n+1}-1$ 1 pont

A kifejezés értéke racionális, ha $\sqrt{n+1}$ racionális, azaz $n+1$ négyzetszám.
1 pont

$n+1<2025$ feltételt figyelembe véve $n+1$ értéke $1^2; 2^2; \dots; 44^2$ lehet.
1 pont

$n+1=1\rightarrow n=0$, nem lehetséges a feltétel miatt ($n>0$) 1 pont

Tehát 43 db pozitív egész esetén lesz racionális. 1 pont

Összesen: 13 pont